高校数学における課題への取組みについて

副所長　成川雅一　中田政晴

これまで高等学校で数学を指導してきた立場から、高校数学における課題を考察した。成川からは「立体の体積や表面積を求める問題の指導について」、中田からは「『高校数学における鳥瞰図』を活用した授業実践～生徒１人に１台のタブレットを用いた協働学習～」の研究を報告する。

〈キーワード〉立体の体積、曲面積、断面図、積分法、鳥瞰図、タブレット、協働学習、学びの再構成

Ⅰ 立体の体積や曲面積を求める問題の指導について

１　はじめに

長年にわたる教員生活を振り返ってみると、ほとんどが大学入試のための教科指導で追われたように思う。その中で、自分としてはどうしても自信を持って指導できない分野がある。それは、積分法の応用である立体の体積や曲面積を求める問題である。若いころにもっと努力をしていればと悔やまれるのであるが、いつかは整理をしなければならないと考えていた。今回、遅ればせながら自分なりにまとめる機会をいただき、主題設定した。

２　立体の把握と体積の求め方

立体の問題を実際に解くとき、題意を満たす立体の概形を把握するために図を平面に書こうとしても、扱う対象が３次元の物体ということで図を書くことはたいへん難しい。斜めから見た図が適切に書けるのならばよいが、もし書きにくいならば図を書くことに固執しない。そのようなときには、３次元の立体を数式による立体の表現を利用して、座標計算を主体にする。または、３次元の立体の断面図、展開図、正射影を利用する。座標軸の正方向、負方向から見たり、平面があるならば平面に水平、平面に垂直な方向から見たりして図を書いて、後は頭の中で想像する。

次に、積分を用いて立体の体積を求めるには、「その立体を適当な平面による切り口の面積の計算できる微小部分に分割し、それらを積分を用いて加え合わせる」ことが原則であるので、断面積は必要であるが、立体の概形は必ずしも解らなくてもよい。しかし、この適当な平面というのがやっかいで、初めから問題文に明示している場合もあるが、自分で設定しなければならない場合が多い。

３　回転体の体積

回転体の体積を求める問題では、教科書等に載っている x 軸、y 軸のまわりの回転体の体積を求める公式は使えないことが多い。その場合は、回転軸に垂直な切断面を考えることになる。回転体では，その切り口には円板、または円環（ドーナツ）しか現れないから、比較的容易に求めることができる。そして、断面積を求めてから積分する。ポイントは「回してから切る」のではなく、「切ってから回す」のである。

（1）　線分の回転体

平面による線分の切り口は点になり、点を回転させたときに現われる図形は円である。

> 問題１　xyz 空間において、点 P を $(1, 0, 1)$、点 Q を $(a, a+1, 0)$ とする。線分 PQ を z 軸のまわりに１回転して得られる曲面と平面 $z = 1$ および xy 平面で囲まれる部分の体積を $V(a)$ とおく。a が実数全体を動くときの $V(a)$ の最小値およびそれを与える a の値を求めよ。（東大）

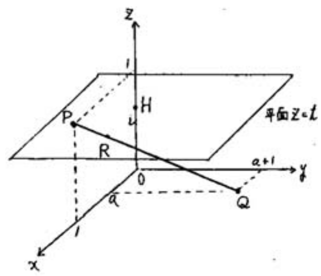

図１

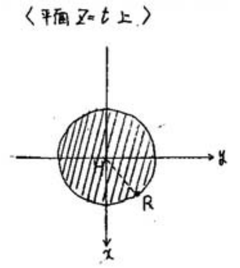

図２

＜指針＞回転軸が z 軸であるから、z 軸に垂直な平面 $z=t(0 \leqq t \leqq 1)$ で線分 PQ を切ったときの z 軸、線分 PQ との交点を H、R とする。点 H を中心にして点 R を z 軸のまわりに回転させると、切断面と線分との交点は点だから、半径 HR の円板が得られる。この円板の断面積を積分すれば立体の体積が求められる。

(2)　平面図形の回転体

(1)の問題では、切断面による線分の切り口は点になるので回転軸とその点の距離を求めればよかったが、(2)の問題では、切断面による平面図形の切り口が線分になるので、中心からの距離の最大値および最小値を考えなければならない。線分を回転させたときに現れる図形は円環（ドーナツ）である。

問題２　空間内に、３点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}, 0\right)$、$\mathrm{Q}\left(1,\ -\dfrac{1}{2}, 0\right)$、$R\left(\dfrac{1}{4}, 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。S を z 軸のまわりに１回転させたとき、S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。（東大）

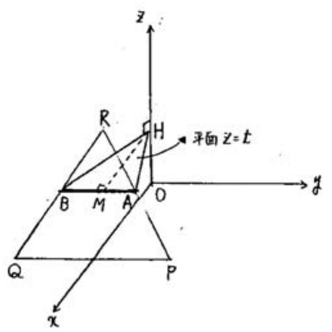

図３

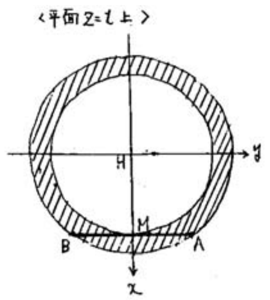

図４

＜指針＞回転軸が z 軸であるから、z 軸に垂直な平面 $z=t\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で △ PQR を切ったときの z 軸、辺 RP、辺 RQ との交点をそれぞれ H、A、B とすると、切り口は線分 AB である。点 H を中心にして線分 AB を z 軸のまわりに回転させると、切断面と正三角形との切り口は線分で、中心からの距離の最大値は HA＝HB、最小値は HM だから、半径 HA、HM の２つの同心円の間の部分、すなわち円環が得られる。この円環の断面積を積分すれば立体の体積が求められる。

(3)　立体図形の回転体

これらの問題では、切断面による立体図形の切り口が平面図形になるので、(2)の問題と同様に、「回してから切るのではなく、切ってから回すこと」と、「軸から距離の最大値と最小値を求めること」がポイントである。これを回転したときに現れる図形は円環（ドーナツ）である。

問題３　xyz 空間において、$(x-2)^2+y^2+z^2 \leqq 1$、$1 \leqq x \leqq 2$ で定められた領域 D がある。D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

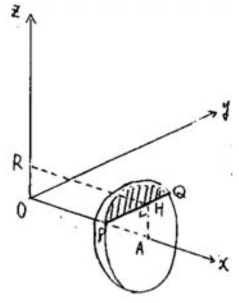

図５

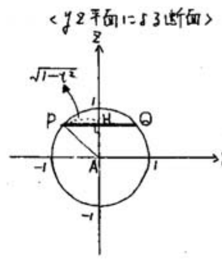

図６

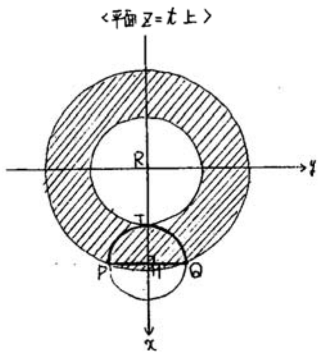

図７

＜指針＞回転軸が z 軸であるから、z 軸に垂直な平面 $z=t$（$-1\leqq t\leqq 1$）で 領域 D を切ったときの切り口は与式に $z=t$ を代入して、$(x-2)^2+y^2\leqq\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2$、$1\leqq x\leqq 2$ より、切断面と立体の切り口は中心 $(2, 0, t)$、半径 $\sqrt{1-t^2}$ の半円板になる。平面 $z=t$ と z 軸との交点を R とし、切り口上に点 P、Q、T をとって、点 R を中心にして半円板を z 軸のまわりに回転させると、中心からの距離の最大値は RP = RQ、最小値は RT だから、半径 RP、RT の２つの同心円の間の部分、すなわち円環が得られる。この円環の断面積を積分すれば立体の体積が求められる。

４　バーム・クーヘン法と傘型求積法

y 軸のまわりの $y=f(x)$ による回転体の体積 V は、$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)\Leftrightarrow x = g(y)$ $(c\leqq y\leqq d)$ と変形して、$V=\pi\displaystyle\int_c^d\{g(y)\}^2\,dy$ で求めることができるが、この解法は逆関数を求めなければならないことおよび逆関数を積分する計算が複雑になることなどの難点がある。

そこで、これらの難点を回避するために登場した求積法のことを「バーム・クーヘン法」と呼ぶ。これは円筒形の面を何層にも重ねて１つの立体と見なす方法であり、このときの面の厚さは Δt となり、x 軸上に取れることが最大のポイントである。また､バーム･クーヘン法を受験技術に導入させる先駆けとなったのはこの東大の入試問題である。

問題４　$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は　$V=2\pi\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ で与えられることを示し、この値を求めよ。(東大)

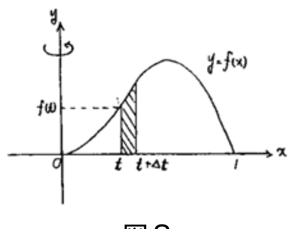

図８

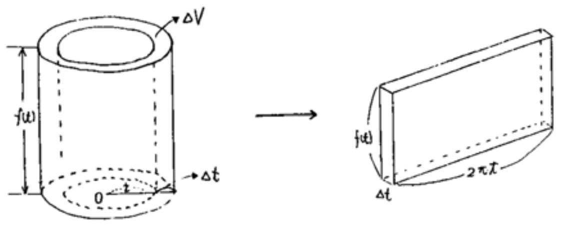

図９

＜指針＞$f(x)$ のグラフの $t\leqq x\leqq t+\Delta t$ の部分と x 軸とで囲まれた部分を、y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を ΔV とする。ΔV は Δt が十分小さいとき、底面が外半径 $t+\Delta t$、内半径 t の同心円で、高さが $f(t)$ $(\geqq 0)$ の円筒形の立体で近似できるから、$\Delta V\fallingdotseq\pi\{(t+\Delta t)^2-t^2\}f(t)\Leftrightarrow\dfrac{\Delta V}{\Delta t}\fallingdotseq\pi(2t+\Delta t)f(t)$ となる。ゆえに、$\dfrac{dV}{dt}=\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=2\pi tf(t)$ が得られるから公式が導かれる。

回転軸が x 軸や y 軸に対して傾いている場合は、「回転軸に垂直な断面を考える」「回転軸が x 軸に重なるまで原点のまわりに回転して考える」という２つの方法があるが、いずれも積分計算が複雑である。そこで、x 軸に垂直な断面を考えて ΔV を評価する方法がある。これを「傘型求積法」と呼ぶ。本来、回転体の体積は回転軸に対し垂直に積分変数をとるものであるが、傘型求積法では傘の厚みが Δx または Δt となり、この傘を何層にも重ね合わせて全体の立体と見なせばよい。

問題５　xy 平面において、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ によって囲まれた図形を直線 $y=x$ のまわりに１回転してできる回転体の体積を求めよ。（慶應義塾大）

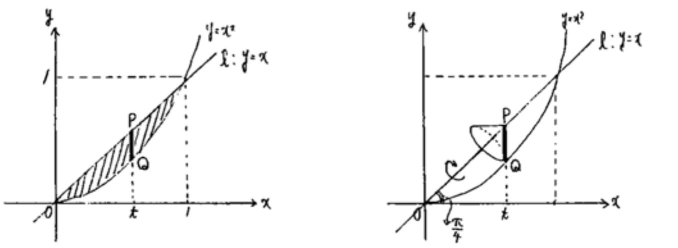

図10

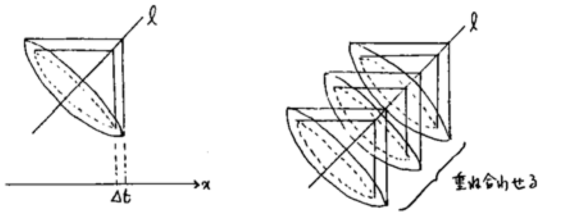

図11

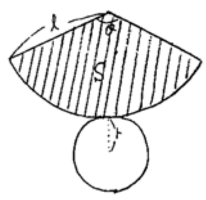

図12

＜指針＞放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ によって囲まれた部分を直線 $x=t\,(0\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの交点を P (t,t)、Q(t,t^2) とすると、切り口は線分 PQ $=t-t^2$ で、これを直線のまわりに回転して得られる図形は円錐体の側面である。円錐体の側面積は底面の半径を r、母線の長さを l とすると、πrl で与えられるから、$S(t)=\pi\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}PQ^2=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}(t-t^2)^2$ を積分すれば回転体の体積が求められる。

５　非回転体の体積

（1）不等式で表示された非回転体

非回転体の体積はまず断面積を求める。断面積 $S(t)$ を求めるには、座標軸に垂直な平面 $x=t$ または $y=t$ または $z=t$ による切り口を考える。切り口は長方形、三角形、台形、平行四辺形、円の一部分、楕円、放物線と直線の囲む図形等である。

不等式で表示された場合は、どの軸に垂直な平面で切るかによって、切り口に現れる図形の形状が異なる。また、むやみに立体の概形を考える必要はない。ゆえに、立体の体積を求めるためには面積の求めやすい図形が切り口として現れる軸を選択することが重要である。すなわち、最も面倒な文字（最高次数の文字、または次数が同じならば最頻出の文字）を選択する。最も面倒な文字を固定すればより単純な動きをする２変数のみが動き、それだけ断面積が求めやすくなる。

問題６　xyz 空間において、不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$、$(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域 D の体積を求めよ。（埼玉大）

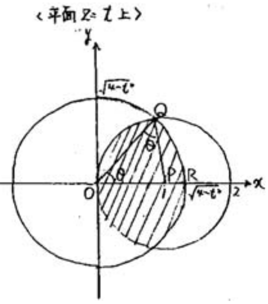

図13

＜指針＞領域は xy 平面について対称であるので、平面 $z=t(0 \leqq t \leqq 2)$ で立体を切る。与えられた不等式で $z=t$ とおくと、$x^2+y^2 \leqq 4-t^2$、$(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ が得られる。この切り口の図形は中心 $(0, 0, t)$、半径 $\sqrt{4-t^2}$ の円と、中心 $(1, 0, t)$、半径１の円の共通部分である。共通部分には円弧が含まれるので、図のように点P、Q、R を定め、$\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{PQO} = \theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおいて、積分変数を t から θ へ変換する。このとき、$t=2\sin\theta$、$\cos\theta=\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}$ だから断面積 $S(t)$ を θ を用いて表すと、$S(t)=4\theta\cos^2\theta+(\pi-2\theta)-2\sin\theta\cos\theta$ が得られる。この断面積を積分すれば領域の体積が求められる。

問題７　r を正の実数とする。xyz 空間において $x^2+y^2 \leqq r^2$、$y^2+z^2 \geqq r^2$、$z^2+x^2 \leqq r^2$ を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。（東大）

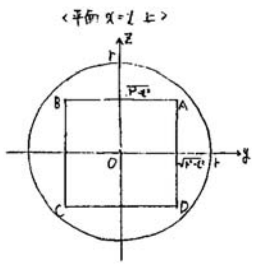

図14

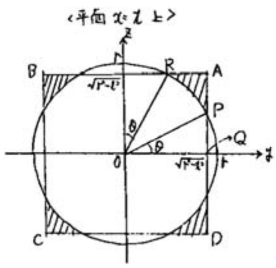

図15

＜指針＞x、y、z のうち y、z が対等で x は特別だから、平面 $x=t\,(0 \leqq t \leqq r)$ でこの立体を切る。与えられた不等式で $x=t$ とおくと、$|y| \leqq \sqrt{r-t^2}$、$|y| \leqq \sqrt{r-t^2}$、$y^2+z^2 \leqq r^2$ が得られる。ここで、切り口の図形が存在するためには正方形ABCD が円板の外部 $y^2+z^2 \leqq r^2$ と共通部分をもつこと $\Leftrightarrow 0 \leqq t \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$ であることが必要十分である。この切り口の図形には円弧が含まれるので、図のように点P、Q、R を定め、$\angle \mathrm{POQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおいて、$0 \leqq t \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$ より $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ で、積分変数を t から θ へ変換する。このとき、$t=r\sin\theta$、$\sqrt{r^2-t^2}=r\cos\theta$ だから断面積 $S(t)$ を θ を用いて表すと、$S(t)=r^2\{4\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta-(\pi-4\theta)\}$ が得られる。この断面積を積分すれば立体の体積が求められる。

（2）その他の非回転体

非回転体の体積を求めるとき、「断面積を積分すれば体積」ではない。断面が軸に直交していなければ体積にはならない。そして、問題によっては軸に直交していない面積の方が求めやすいこともある。次の問題は立体を上手に切ると積分計算が簡単になる例である。

問題８　放物線 $y=\dfrac{3}{4}-x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を、原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る。曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ。（東大）

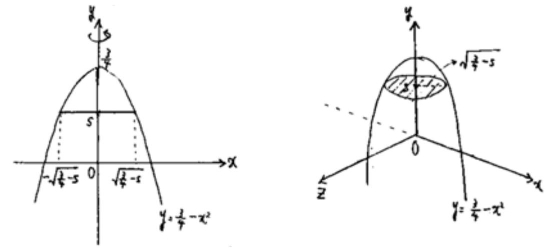

図16

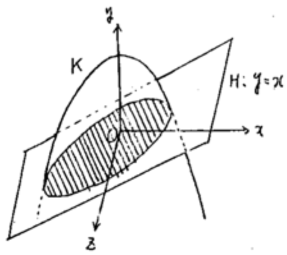

図17

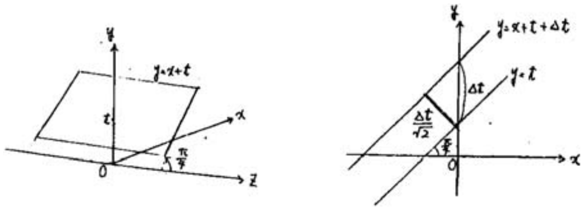

図18

＜指針＞回転体 K の方程式は $x^2+z^2=\dfrac{3}{4}-y$ で、平面 H の方程式は $y=x$ としても一般性を失わない。題意の立体を平面 H に平行な平面 $y=x+t\ (t \geqq 0)$ で切った切り口を zx 平面に正射影したときの図形の方程式は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=1-t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ より中心 $\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$、半径 $\sqrt{1-t}$ の円だから、その面積は $\pi(1-t)$ である。平面 $y=x+t\ (t \geqq 0)$ で切ったときの切り口の断面積 $S(t)$ は $S(t)=\dfrac{\pi(1-t)}{\cos\dfrac{\pi}{4}}$ である。断面積を積分するとき２平面 $y=x+t$、$y=x+t+\Delta t$ 間の距離は $\dfrac{\Delta t}{\sqrt{2}}$ であることに注意すると、立体の体積 V は $V=\displaystyle\int_0^1 S(t)\frac{dt}{\sqrt{2}}$ で求められる。

問題９　xyz 空間に５点 A $(1,1,0)$、B $(-1,1,0)$、C $(-1,-1,0)$、D $(1,-1,0)$、P $(0,0,3)$ をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。（東大）

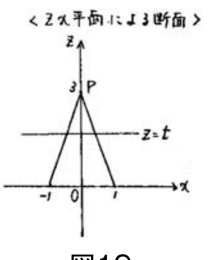

図19

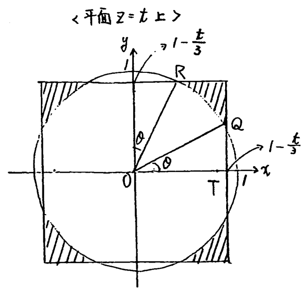

図20

＜指針＞四角錐 PABCD を平面 $z=t$ $(0\leqq t\leqq 3)$ で切って直線 AP の方程式を用いると正方形が得られる。これが円の外部 $x^2+y^2\geqq 1$ と共有点をもつためには、$0\leqq t\leqq 3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$であることが必要十分である。この切り口の図形には円弧が含まれるので、図のように点 Q、R、T を定め、$\angle \mathrm{TOQ}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおいて、積分変数を t から θ へ変換する。このとき、$t=3(1-\cos\theta)$だから断面積 $S(t)$ を θ を用いて表すと、$S(t)=4\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta-(\pi+4\theta)$ が得られる。この断面積を積分すれば立体の体積が求められる。

6　立体の曲面積

立体の曲面の面積は、定義も教科書にはまったく載っていないので、実際に大学入試に出題されるのは、平面上に展開できる曲面、すなわち円柱の一部と円錐だけである。したがって、展開図を書いて積分することになる。

問題 10　座標空間において円柱面$T=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1\}$を考える。
(1) 円柱面 T 上の点 P$(1, 0, 0)$、Q$(x, y, 0)$、R(x, y, z) において、PR$=2$ のとき、z を$\theta=\angle$POQの関数で表せ。ただし、$z\geqq 0$、O は原点とする。
(2) 中心$(1, 0, 0)$、半径 2 の球 S の内部にある円柱面 T の部分の面積を求めよ。（埼玉大）

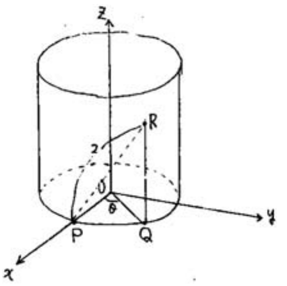

図21

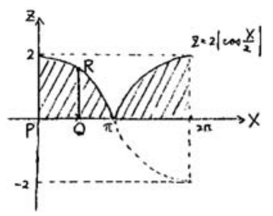

図22

＜指針＞（1）点 Q、R は円柱面 T 上の点だから Q$(\cos\theta,\sin\theta,0)$、R$(\cos\theta,\sin\theta,z)$とおける。PR$=2$ より、$z^2=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}\Leftrightarrow z=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$が得られる。

(2) $\overset{\frown}{PQ}=X$ と変数変換すると、$X=\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ より $z=2\left|\cos\dfrac{X}{2}\right|$ $(0\leqq X<2\pi)$ ゆえに、点 P を通り z 軸に垂直な直線で円柱を切って展開し、点 P を原点、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 方向に X 軸、$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ 方向に z 軸をとると図 22 のようになる。したがって、求める曲面積は $z\leqq 0$ も考慮して $2\displaystyle\int_0^{2\pi}QR\,dX=2\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{X}{2}\right|dX=4\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{X}{2}\right|dX$ で求められる。

問題 11　z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で、xy 平面より上（z 軸の正の方向）にあり、平面 $x-\sqrt{3}\,y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分を D とする。D の面積を求めよ。（東大）

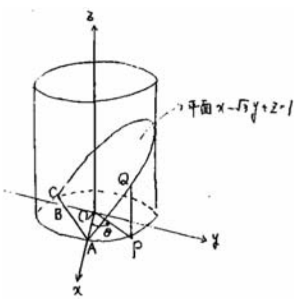

図23

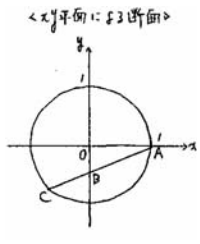

図24

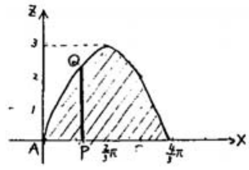

図25

＜指針＞円柱の底面の周上に点$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$をとりPを通り$z$軸に平行な直線と平面$x-\sqrt{3}\,y+z=1$との交点を$\mathrm{Q}\,(x, y, z)$とすると、$x=\cos\theta$、$y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$とおける。また、点Qは平面上の点だから $z=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta+1=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$ が得られる。点Qが領域D内にあることより $0 \leqq \theta \leqq \frac{4}{3}\pi$
ここで、$\overset{\frown}{AP}=X$ と変数変換すると、$X=\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{4\pi}{3}\right)$ より $z=\mathrm{PQ}=\sqrt{3}\sin X-\cos X+1$ $=2\sin\left(X-\frac{\pi}{6}\right)+1$ $\left(0 \leqq X \leqq \frac{4\pi}{3}\right)$ ゆえに、点Aを通りz軸に平行な直線で円柱を切って展開し、点Aを原点、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$方向にX軸、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$方向に$z$軸をとると図25のようになる。したがって、$D$の面積$S$は
$S=\int_0^{\frac{4\pi}{3}} PQdX=\int_0^{\frac{4\pi}{3}}(\sqrt{3}\sin X-\cos X+1)dX$ で求められる。

7　まとめ

数学という学問は知識を覚えることも大切であるが、それよりも、知識を活用して問題を解決していく能力を養うところに値打ちがあり、また、それだけに難しさもある。高等学校の数学の学習においても基礎知識の学習とともに問題解法の練習が進められるが、最も困難を覚えるのがその問題を解くことの難しさである。

問題を解くためには、次の３つのポイントが重要であると考えられる。

① 理論的流れにしたがい、体系的に諸事実を的確に理解すること。
② 視覚に訴えて、ものの全貌をグローバルに把握すること。
③ 同様な考え方を反復練習して理解すること。

このように長年にわたり大学入試のための教科指導に専念してきたわけであるが、改めて振り返ってみると、学ぶ側の生徒にとって果たして適切なものであったかと反省させられる。今後とも、より効果的な指導の研究を重ねていきたいと思う。

Ⅱ「高校数学における鳥瞰図」を活用した授業実践

1　実践授業までのいきさつ

数学離れを解決するための指導上の工夫として、高校３年間で学ぶ単元、及びその内容の関連性を示し、生徒が意欲的に見通しをもって学習に取り組めることを主眼として、各単元の問題を中心にその考察を進めてきた。また、各単元の導入やまとめの際に活用できるよう、生徒が興味・関心をもつようなトピックスも集めた。理論を大切にし、高校数学の全体像を明らかにすることにより、系統的に思考できるものとして、熟慮を重ねて編集したテキストが「高校数学における鳥瞰図」である。鳥瞰図（ちょうかんず、bird's—eyeview）とは、鳥の眼に写る景色さながらに高みから見おろしたように描いた図のことである。記号と図式によって地形・地物を描く近代地図の出現前に、絵画的手法で特定地域の状況、たとえば地形や耕地・集落、道路・水路、境界などを示したのが始まりで、ヨーロッパで発達した都市鳥瞰図のような大縮尺図から、日本の荘園図、あるいは国絵図のようなかなりの広域を扱ったものまで、各種各様の鳥瞰図がある。概要がわかりやすいため、今日でも主として旅行者や観光客相手の案内図として作成されている。

そこで高校数学の全体像と、単元や内容の関連を生徒が理解していけることを目的に、鳥瞰する形で見ていけるようにと編集した。その鳥瞰図とタブレットを用いて、協働学習を行った授業実践である。

2　本時の目的

高校数学を見通す教材として鳥瞰図（ちょうかんず）を作成した。今までの数学を振り返るととも

に、これから学ぶ数学も調べてみる。今まで授業は分野ごとに習ってきた。本時はつながりを考察し、肉付けを行う。別な分野へのつながりや解法・公式の意味などが見えてくる。これらを通し、自分の中の数学を再構成していく。一人一台のタブレットに鳥瞰図が入れてあり、割り当てた分野を中心に調べていき、付箋をつけていく。そしてつけた付箋をもとに、話し合いながら学びを再構成していく。

３　実践までの手順

（1）鳥瞰図を PDF 化し、目次をつけて、調べやすいように加工した。

（2）タブレット（ipad）45 台に鳥瞰図データを導入。

（3）対象学年と分野、進度状況

	実施クラス	人数：時間	分野	進度状況
１回目 12 月 13 日（金） ３限目	１年１組 普通科	38 名：45 分	数と式 関数 図形と計量	数学Ⅰ・数学Ａを履修し、数学Ⅱに入る前の時期
２回目 12 月 17 日（火） ２限目	２年４組 理系Ｓクラス	38 名：50 分	数列 微分 ベクトル	数学Ⅰ・数学 A・数学Ⅱ・数学 B を履修し、数学Ⅲの学習に入る時期

（4）授業の前にアンケート実施

今までに習った内容の中で苦手な分野とよく理解した分野の調査。アンケートを元に苦手分野を３つの分野に絞り、実践でグループごとに分けて行った。

（5）実施教室　藤島高等学校３号館１Ｆ　生物実験室

（４人座りの大きな机のある教室）

４　当日の授業の流れ

時間	学習の流れ	活動内容	備考
５分	趣旨説明と使い方	本日の流れ説明・目標	
６分	一例を挙げて鳥瞰図の説明 （因数分解の分野） コラムの説明	タブレットの使い方説明と同時に内容の説明をする。	タブレット電源 ON
９分	個人の活動の時間 自由に PDF ファイルを開く	気がついたところに付箋を貼る活動　色３色（赤・青・黄色）	赤：新たに気がついた点 青：疑問に思う点改良点
15分	協働の作業の時間	Ａ３拡大印刷版に付箋を貼り付けて説明し合う活動	互いに説明しあう時間
８分	班の発表	教員用タブレットのカメラ機能で撮影しプロジェクタへ拡大提示提示 まとめる活動 生徒代表の発表・説明の活動	黄：大きな付箋のなかに協働で得たことを記入する。
５分	振り返りまとめ	アンケート記入	タブレット電源 OFF
２分		まとめ	

付箋の種類と意味　　赤色の付箋　　…鳥瞰図で参考になった点や加える内容
青色の付箋　　…わからないところや疑問に思う点とその理由
黄色の大きな付箋　　…話し合いの中からでてきてた内容を記入

５　本時のまとめ

・発表の内容として、階差数列の一般項の公式の図的理解、三角関数の微分の定義と図的理解、ベクトルの分野の拡張性などがあげられた。数学を振り返り、自らの言葉で表現することができていた。

・数学を系統的に見通したことで、今後は、身近な資料や副読本などを調べることで、内容を深め、理解していくよう指導した。そして個人個人の中の「数学の世界」を創造する活動を続けるようにと授業をまとめた。

６　実践授業後の今後の課題（４つの視点）

(1) 鳥瞰図の内容における課題
(2) タブレットにおける課題（使い方と機種）
(3) 発表形式における課題（タグ式で皆の画面の共有化）
(4) 対象学年や時期の問題

《参考文献》

○松尾吉知（1987）『わかる空間図形大学入試数学』科学振興社
○秋山　仁（1989）『立体のとらえかた』駿台文庫
○河合正人（2000）『医学部数学のすべて』河合出版
○鉄緑会数学科（2002）『鉄緑会東大数学問題集』角川書店
○生越茂樹（2005）『数列からの積分入門』
○西山清二・黒田恵悟・加畑昭和（2006）『医学部攻略の数学ⅢＣ』河合出版
○猪俣清二・河田直樹・髙橋正美（2008）『東大数学入試問題 50 年』聖文新社
○安田　亨（2009）『東大数学で１点でも多く取る方法』東京出版
○黒木哲徳（1999）『高校における数学教育を考える』数学教育研究
○佐伯　胖（1995）『学ぶということの意味』岩波新書 508、p186
○中田政晴（1999）『コンピュータを使った数学教育について』福井大学教育実践研究、第 24 号、p259
○鳥瞰図編集員（2013）「高校数学における鳥瞰図」（小和田和義･成川雅一･波多野　恒･入羽弘之･福嶋洋之･山本寛･中田政晴）
○中田政晴･黒木哲徳（1999）『コンピュータを使った数学教育について：学びを再構成する力を育てる』福井大学･教育実践研究（24）、259-277
○中田政晴（2000）『コンピュータを使った数学教育について：学びを再構成する力を育てる』、264-267、日本教育情報学会